Εξέταση Σεπτεμβρίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 3

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στις ερωτήσεις με $*$ ενδέχεται να υπάρχουν και περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις.

Ερώτηση 1. Έστω η συνάρτηση $f\colon [-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & , \quad y>x \\ x^2+y^2 & , \quad y\leq x \end{cases},$$

τότε η f

(i) δεν έχει ακρότατα αφού, δεν είναι συνεχής,

(ii) έχει τοπικά μέγιστα μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της για τα οποία $y>x$ και επίσης στο σημείο $(1,-1)$,

(iii) έχει τοπικά ελάχιστα στα σημεία του πεδίου ορισμού της για τα οποία $y>x$ και επίσης στα σημεία $(0,-1),(1,0)$,

(iv) έχει τοπικά ελάχιστα και μέγιστα στα σημεία του πεδίου ορισμού της για τα οποία $y>x$ και ολικό ελάχιστο στο σημείο $(-1,-1)$,

(v) έχει ολικά μέγιστα στα σημεία του πεδίου ορισμού της για τα οποία $y>x$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$,

(vi) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 2. Έστω η συνάρτηση $f\colon(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=x+y$. Τότε, η f

(i) δε λαμβάνει ούτε ολικό μέγιστο, ούτε ολικό ελάχιστο,

(ii) λαμβάνει ολικό μέγιστο στο $(1,1)$ και ολικό ελάχιστο στο $(0,0)$,

(iii) λαμβάνει όλικο ελάχιστο στο $(0,0)$, αλλά δε λαμβάνει ολικό μέγιστο.

(iv) δεν ισχύει κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 3. Η συνάρτηση $f\colon\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{xy} & , \quad xy>0 \\ xy & , \quad \text{αλλού} \end{cases},$$

είναι συνεχής

(i) μόνο στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

(ii) μόνο στο $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y): x=0 \text{ ή } y=0\}$,

(iii) σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

Ερώτηση 4. (Σωστό ή Λάθος;) Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και έστω ότι υπάρχει η $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχής. Τότε, υπάρχει και η $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και ισχύει $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

ΣΩΣΤΟ

Ερώτηση 5. Η ανισότητα $\|\bar{x} - 2\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + 2\|\bar{y}\|$,

(i) δεν ισχύει για όλα τα $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

(ii) ισχύει για όλα τα $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ και η ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν είτε $\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| = 0$, είτε $\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| > 0$ και τα $\bar{x}, 2\bar{y}$ είναι ομόροπα,

(iii) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 6. Έστω συναρτήσεις $\bar{f}, \bar{g}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}.$$

Τότε η συνάρτηση (εσωτερικό γινόμενο) $\bar{f} \cdot \bar{g}$ είναι:

(i) ένα διανυσματικό πεδίο,

(ii) πραγματική συνάρτηση με σύνολο στάθμης 1 το σύνολο $\{(0, 0, 0)\}$,

(iii) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 7. (Σωστό ή Λάθος;) Ένα μη κενό σύνολο στάθμης μιας πραγματικής συνάρτησης περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών είναι κλειστό αν και μόνο αν η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής. ΛΑΘΟΣ

Ερώτηση 8. (Σωστό ή Λάθος;) Αν μία πραγματική συνάρτηση περισσοτέρων πραγματικών μεταβλητών δεν είναι μερικώς διαφορίσιμη σ' ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε δεν έχει παραγώγους κατά κατεύθυνση. ΛΑΘΟΣ

Ερώτηση 9. (Σωστό ή Λάθος;) Δίνονται μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

και μία παραμετρική καμπύλη $\overline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Τότε, η συνάρτηση $\sqrt{g \circ \overline{\gamma}}$ δίνει για κάθε $t \in [a, b]$ την απόσταση του σημείου $\overline{\gamma}(t)$ της καμπύλης από την αρχή των αξόνων. ΣΩΣΤΟ

Ερώτηση 10. Έστω $r > 0$ και $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| = 2r$. Τότε, το σύνολο

$$B(\bar{x}_1, r) \cap B(\bar{x}_2, r)$$

(i) περιέχει κάποιο σημείο στο $\partial B(\bar{x}_2, r)$,

(ii) περιέχει το σημείο $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2}$,

(iii) είναι το κενό,

(iv) κανένα από τα αναφερόμενα.

* **Ερώτηση 11.** Μια συνάρτηση $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ έχει σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(i) δεν μπορεί να έχει 12 διαφορετικές παραγώγους τρίτης τάξης,

(ii) μπορεί να έχει περισσότερες από 9 διαφορετικές παραγώγους τρίτης τάξης,

(iii) 27 μερικές παραγώγους τρίτης τάξης,

(iv) έχει το πολύ 9 διαφορετικές παραγώγους τρίτης τάξης,

(v) κανένα από τα αναφερόμενα..

Ερώτηση 12. Η κατεύθυνση στην οποία η συνάρτηση

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1,$$

έχει στο σημείο $\frac{1}{2}(1, 1)$ τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης («τη μεγαλύτερη κλίση») είναι η εξής:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$,

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$,

(iii) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 13. (Σωστό ή Λάθος;) Ας είναι δύο ακολουθίες $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\bar{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_n \to \bar{0}$. Αν $\bar{x}_n \cdot y_n \to 0$, τότε υπάρχει $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{y}_n \to \bar{y}_0$. ΛΑΘΟΣ

* **Ερώτηση 14.** Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \quad xy > 0 \\ xy & , \quad \text{αλλού} \end{cases},$$

(i) έχει στο σημείο $(0, 0)$ παράγωγο κατά κάθε κατεύθυνση,

(ii) είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο με $x = 0$ ή $y = 0$,

(iii) είναι μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$,

(iv) είναι μερικώς διαφορίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της,

(iv) δεν ισχύει κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 15. Το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\cos(xy) - 2 + x^2y^2}{x^4 + 2y^3 + 3x^2 + 4y}$$

(i) έχει την τιμή 0,

(ii) έχει την τιμή 1/12,

(iii) δεν υπάρχει,

(vi) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 16. Το σύνολο:

$$\{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : xy > 1\}$$

είναι

(i) κλειστό,

$\boxed{\text{(ii)}}$ ανοιχτό,

(iii) ούτε κλειστό, ούτε ανοιχτό,

(vi) ανοιχτό και φραγμένο,

(v) συμπαγές,

(vi) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 17. (Σωστό ή Λάθος;) Υπάρχουν συναρτήσεις $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ οι οποίες είναι μερικώς διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$ και συνεχώς διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμες στο $(0,0)$. ΣΩΣΤΟ

Ερώτηση 18. Το γράφημα της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1,$$

έχει στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ το εφαπτόμενο επίπεδο με εξίσωση:

$\boxed{\text{(i)}}$ $\sqrt{2}z = 2 - x - y$,

(ii) $\sqrt{2}z = 1 - x - y$,

(iii) $z = \sqrt{2} - x - y$,

(iv) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 19. Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ και $r > 0$. Το σύνολο

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$$

είναι γεωμετρικά

(i) μπάλα,

(ii) κώνος,

(iii) σφαίρα ακτίνας r^2,

(vi) ευθεία,

$\boxed{\text{(v)}}$ κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 20. Για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\epsilon > o$ έτσι ώστε για κάθε $\bar{y} \in B(\bar{x}, \epsilon)$ να ισχύει:

(i) $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq \|D\bar{f}(\bar{x})\| \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$,

(ii) $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq 2\|D\bar{f}(\bar{x})\|\|\bar{x} - \bar{y}\|$,

(iii) $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq \|D\bar{f}(\bar{x})\|\|\bar{x} - \bar{y}\|$,

(vi) $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq (\|D\bar{f}(\bar{x})\| + 2020^{-2020})\|\bar{x} - \bar{y}\|$,

(v) κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 21. (Σωστό ή Λάθος;) Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ και $f \in C^2(U)$ με $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Αν ο Εσσιανός πίνακας της f έχει στο $\bar{x}$ ορίζουσα μηδέν, τότε η f δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο σημείο $\bar{x}$. ΛΑΘΟΣ

Ερώτηση 22. (Σωστό ή Λάθος;) Έστω ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^n$ και $f : U \to \mathbb{R}$. Αν στο $\bar{x} \in U$ υπάρχουν όλες οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση της f, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$. ΛΑΘΟΣ

Ερώτηση 23. Για ποιες κατευθύνσεις $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\bar{v}\| = 1$ μηδενίζεται η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

στα σημεία (x_0, x_0) με $x_0 > 0$;

(i) Μόνο στις κατευθύνσεις $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$,

(ii) Μόνο στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$,

(iii) Μόνο στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,

(vi) Μόνο στην κατεύθυνση $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$,

(v) Μόνο στις κατευθύνσεις $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$,

(vi) Κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 24. Η καμπύλη στάθμης 0 της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι γωμετρικά:

(i) υπερβολή,

(ii) κύκλος ,

(iii) το σημείο $(0, 0)$,

(vi) η ένωση της διαγωνίου (η οποία περνά από το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο) και της αντιδιαγωνίου (που περνά από το δεύτερο και το τέταρτο τεταρτημόριο) στο καρτεσιανό επίπεδο,

(v) Κανένα από τα αναφερόμενα.

Ερώτηση 25. Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $u\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : xy \neq 0\} \to \mathbb{R}$ με

$$u(x,y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Τότε, στο πεδίο ορισμού της u ισχύει

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = G(x,y)u(x,y),$$

όπου $G(x,y) =$

(i) $x - y$,

(ii) $y - x$,

(iii) $y^2 - x^2$,

(vi) $x^2 - y^2$,

(v) 0,

(vi) Κανένα από τα αναφερόμενα.